

Pesquisas em Geociências

<http://seer.ufrgs.br/PesquisasemGeociencias>

A Curva de Lorenz-Thofehrn

Hans Augusto Thofehrn

Pesquisas em Geociências, 15 (15): 5-21, maio/ago., 1983.

Versão online disponível em:

<http://seer.ufrgs.br/PesquisasemGeociencias/article/view/21720>

Publicado por

Instituto de Geociências



Portal de Periódicos
UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO GRANDE DO SUL

Informações Adicionais

Email: pesquisas@ufrgs.br

Políticas: <http://seer.ufrgs.br/PesquisasemGeociencias/about/editorialPolicies#openAccessPolicy>

Submissão: <http://seer.ufrgs.br/PesquisasemGeociencias/about/submissions#onlineSubmissions>

Diretrizes: <http://seer.ufrgs.br/PesquisasemGeociencias/about/submissions#authorGuidelines>

Data de publicação - maio/ago., 1983.

Instituto de Geociências, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil

A CURVA DE LORENZ-THOFEHRN

HANS AUGUSTO THOFEHRN *

SINOPSE

O estudo chama a atenção sobre a importância, na geomorfologia, da determinação da energia do relevo, expressa em aclives e declives.

A curva de Lorez é um procedimento de usar dois fatores interdependentes em percento, como, por exemplo grupos populacionais e renda de cada estrato, e com os dados construir-se um gráfico de percentagem. Entre a curva assim traçada e a normal, ligando o menor ganho ao maior, teremos, na maior distância separando uma da outra, o grau de dissimilaridade. Thofehrn adequou, mediante alguns artifícios na construção da curva, a superfícies, onde faz o confronto da área com a declividade.

A curva de Lorenz-Thofehrn da, de uma certa área sobre o eixo dos x, em relação com o eixo dos y, a porcentagem dos estratos do relevo. Sabe-se assim quantos, por exemplo, hectares há e de quantos graus, ou por cento, se compõe por estratos. Também o Índice de dissimilitude pode ser obtido por graficação ou por cálculo. O Índice de dissimilitude indica a maior digressão entre a linha de declividade obtida pelo gráfico e a normal que liga a menor a maior altitude no desenho.

No decorrer do trabalho são dadas as dificuldades enfrentadas com a determinação das declividades, algumas fórmulas para sua obtenção, e uma exposição do papel da curva de Lorenz-Thofehrn na Teoria dos Conjuntos de Cantor.

Finalmente é feita uma exposição detalhada sobre a construção gráfica da curva e do cálculo do Índice de dissimilitude. Na conclusão o autor chama a atenção que a análise área-inclinação de glebas agrícolas e áreas urbanas reveladas pela curva, não pode ser subestimada.

ABSTRACT

The curve of Lorenz has become adjusted by Thofehrn in order to correlate area and inclination. The article shows some difficulties to overcome, and a set of formulas for calculation of the slopes. The conclusion of the article demonstrates the expediency of the proceedings for both rural and urban areas.

*Professor Titular do Departamento de Geodésia do Instituto de Geociências da UFRGS.

Trabalho recebido para publicação em 23/9/80.

Pesquisas	Porto Alegre	n.15	p.5-21	jun. 1983
-----------	--------------	------	--------	-----------

IMPORTÂNCIA DA DETERMINAÇÃO DA ENERGIA DO RELEVO

Um dos dados mais importantes em Geomorfologia é a determinação da *Energia do Relevo*. Da Energia do Relevo, expressa em declives e aclives, depende, ressaltados outros fatores preponderantes, o grau de erodibilidade, a possibilidade de aproveitamento agrícola, o custo da construção de estradas e de obras de infra-estrutura urbana, o uso do solo em geral, os custos de transporte etc.

Existem muitos processos e métodos de determinação da Energia do Relevo, em sua absoluta maioria dependentes da manipulação da Isohipsa ou da curva de nível, isto é: são usados elementos de "segunda mão" tão exatos quanto a interpretação dada ao Modelo Cartográfico.

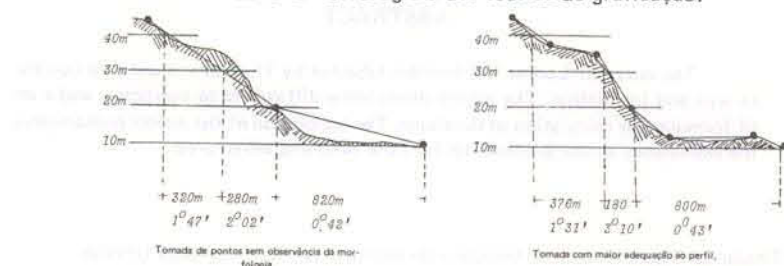
O INTERVALO VERTICAL ENTRE AS CURVAS DE NÍVEL

É sabido que, raramente, os organismos de mapeamento, oficiais ou privados, adotam um correto espaçamento entre as curvas de nível, como, por exemplo, o estabelecido pelo professor Eduard Imhof considerando como "declives-limite" as "inclinações máximas da moda" que venham ocorrer, pelo menos, cinco vezes na área de mapeamento. As curvas resultantes do espaçamento vertical calculado para a escala devem ter uma interdistância horizontal mínima de 0,5mm entre si e ter uma grossura de traço de 0,2mm. Para isso, Imhof propôs a fórmula:

$$\Delta h = \sqrt{\frac{E}{100} + 1} \cdot \log n \cdot \text{tg} \alpha^{\text{max}} \quad \text{onde } n = \sqrt{\frac{E}{100} + 1}; \quad (1)$$

E = escala da carta;
 α^{max} = os declives máximos da moda.

Além disso não são observadas normas rígidas quanto ao número de inclinações a serem tomadas no terreno por $\text{km}^2/\text{Escala}/\text{Eqüidistância}$. Imhof pondera, também, que os pontos determinados por Taqueometria nem sempre retratam a morfografia do terreno, já que o topógrafo está mais treinado para as tarefas que envolvem a matematização dos processos de levantamento em detrimento de conhecimentos sistemáticos de Geomorfologia e das teorias de graficação.



Figuras 1A e 1B. Coeficiente de redução 1,5 ou $\frac{2}{3}$

Mesmo assim o espaçamento vertical das curvas de nível não é, muitas vezes, de molde a retratar a forma análoga dos declives. Repetidas vezes se torna necessário interpolar curvas auxiliares nas planícies para não perder a caracterização dos planos férteis, temática ao planejamento da agricultura intensiva. Outras vezes se torna preciso alterar o intervalo vertical (Δh) entre as curvas a fim de melhor preservar a realidade.

As Isohipsas (curvas de nível sem interseção física) provindas dos levantamentos estereo-aerofotogramétricos, apresentam melhores características morfológicas, pois são circundadas pela marca estereoscópica, mas os limites de acuidade dos restituidores e uma eventual inclinação de plano médio de referência, são responsáveis por erros sensíveis de altitude. Este tipo de erro pode levar, nas planícies, a um notável deslocamento horizontal da Isohipsa, falsificando sensivelmente os declives.

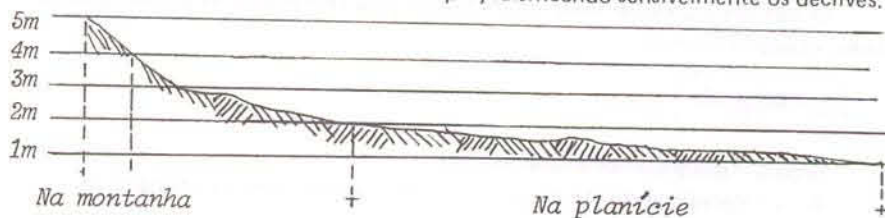


Figura 2. Coeficiente de redução 1,5 ou $\frac{2}{3}$

Nas regiões montanhosas o erro e para o distanciamento horizontal se torna menor na medida que a inclinação cresce: sendo zero aos 90° e um aos 45° .

A acuidade estereométrica para a média dos restituidores fotogramétricos é de, aproximadamente, $0,0003 \rightarrow 0,0008$ de h_0 . (h_0 = Altura de vôo sobre o plano médio do terreno.)

M_b = Escala da Imagem	h_0 para $f = 115\text{mm}$	E	h_0 para $f = 153\text{mm}$	E	h_0 para $f = 210\text{mm}$	E
1: 10.000	1.150m	0,92m	1.530m	1,22m	2.100m	1,68m
1: 25.000	2.875m	2,30m	3.825m	3,06m	5.250m	4,20m
1: 50.000	5.750m	4,60m	7.650m	6,12m	10.500m	8,40m
1:100.000	11.500m	9,20m	15.300m	12,24m	21.000m	16,80m

Plataformas acima de 15.300m são praticáveis somente com aviões especiais, usando-se, em geral, câmaras supergrande-angulares de 66mm de distância focal e que atingem a escala de 1:100.000 aos 6.600m (h_0), mas apresentam um erro altimétrico acima de $\pm 15\text{m}$, devido a maior proporção entre a altura e a base "b", no intervalo de duas fotos.

$$b = s' \cdot m_b \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

(2)
onde b é o comprimento da base no recobrimento longitudinal; m_b = a escala da imagem; p = a porcentagem de recobrimento longitudinal; s' = o formato da imagem.

logo: $0,23\text{m} \cdot 100.000 \left(1 - \frac{50}{100}\right) = 11.500\text{m}$,
então $a \text{ b} = f \text{ } 153\text{mm}$; $\frac{11.500\text{m}}{15.300\text{m}} = 0,75$; $f \text{ } 66\text{mm}$, $\frac{11.500\text{m}}{6.600\text{m}} = 1,74$

PRINCIPAIS MÉTODOS DA MEDIÇÃO DA ENERGIA DO RELEVO SOBRE CARTAS

Os métodos principais para o aquilatamento da Energia do Relevo sobre *Cartas Topográficas* são caracterizados ou pela medição “direta” de declives individuais, ou então por dois procedimentos básicos, que usam a proporção área → intervalo vertical (Δ) entre curvas de nível:

O método individual pode ser facilitado pela construção da *escala de declividades*, usando a fórmula:

$$d = \frac{\cot \alpha \cdot \Delta}{E}$$

(3)

onde d = distância horizontal na carta;
Δ = o intervalo vertical entre as curvas de nível também denominado Δh;
E = escala da carta;
α = o ângulo de declive.

Para a construção da escala gráfica de declividade se estatue estratos de declives, segundo a temática objetivada.

Por exemplo: Construindo uma escala gráfica simples de declividade, para uso agrícola, usando a escala de 1:50.000 e o intervalo vertical das curvas de nível de Δ = 20m.

Tipo de Uso	Declive	cotang	Δ 20m . cot = DHm	$\frac{DH \div n}{100}$
Uso intensivo com irrig.	até 0°30'	114,59	2.291,8m	4,58cm
Uso intensivo	até 1°00'	57,29	1.145,8m	2,29cm
Uso agrícola normal	até 3°00'	19,08	381,6m	0,76cm
Uso extensivo	até 5°00'	11,43	228,6m	0,46cm
Pradarias	até 10°00'	5,67	113,4m	0,23cm
Floresta	acima de 10°00'			

Gráfico 1

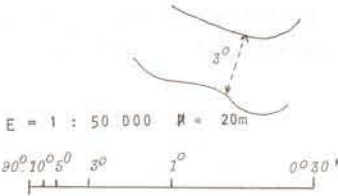


Gráfico 1. Coeficiente de redução 1,5 ou $\frac{2}{3}$

As duas fórmulas básicas para avaliar a energia média de uma determinada área são, em tese, valiosas para uma primeira aproximação quanto à energia média a esperar com a construção de uma rodovia, por exemplo, dando idéia quanto ao desenvolvimento necessário. Presta-se, também, para a tomada de amostras em regiões morfológicas, para caracterização da energia das estruturas gerais.

O primeiro método se cinge mais a áreas menores e se presta mais para relevos simétricos.

Figura 3A

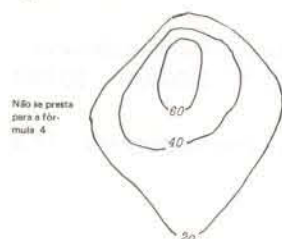
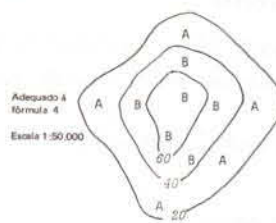


Figura 3B



Figuras 3A e 3B. Coeficiente de redução 1,5 ou $\frac{2}{3}$

A fórmula correspondente é:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\Delta h}{R-r}$$

(4)

onde $\text{tg } \alpha$ é a função tangente;

tg^{-1} é a energia média do relevo em graus;

Δh (ou Δ) o intervalo vertical entre duas curvas de nível;

R = o raio correspondente de um círculo de igual área da curva que engloba a menor \supset ;

r = o raio correspondente ao círculo menor englobado

$$\frac{\Delta h}{E} = \frac{2.000\text{cm}}{50.000} = 0,04\text{cm}$$

É mais fácil reduzir a equidistância à escala.

$$\text{tg } \alpha = \frac{0,04\text{cm}}{0,71\text{cm}} = 0,563; \text{tg}^{-1} = 30^{\circ}13'$$

A = área total (curvas 20, 40 e 60m) \supset .

B = área menor (curvas 40 e 60m) \supset .

Área gráfica de A (a) = $6,9\text{cm}^2$.

Área gráfica de B (b) = $2,3\text{cm}^2$.

$$R = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{6,9\text{cm}^2}{3,1416}} = 1,48\text{cm}$$

$$r = \sqrt{\frac{B}{\pi}} = \sqrt{\frac{2,3\text{cm}^2}{3,1416}} = 0,77\text{cm}$$

$$R - r = 0,71\text{cm}$$

O segundo método, mais adequado à determinação da energia do relevo média, em uma carta, é regido pela fórmula:

$$\boxed{\text{tg} \alpha = \frac{\Sigma l \cdot \Delta h}{A}} \quad (5)$$

onde Σl é o comprimento de todas as curvas de nível ocorrentes na carta;
 Δh (ou \bar{A}) = o intervalo vertical entre as curvas de nível;
 A = área total da carta.

Assim " a " = $3,5\text{cm} \cdot 3,7\text{cm} = 12,95\text{cm}^2$ é a área gráfica do formato da carta.
 O intervalo vertical Δh ou \bar{A} , reduzido à escala $\Delta h \div E = 2,000\text{cm} \div 50.000 = 0,04\text{cm}$.

O comprimento total, Σl das curvas de nível, medidos com opisômetro = 17,8 cm. Então:

$$\text{tg} \alpha = \frac{17,8\text{cm} \cdot 0,04\text{cm}}{12,95\text{cm}^2} = 0,05498$$

$$\text{tg}^{-1} = 3^{\circ}08'$$

Figura 4

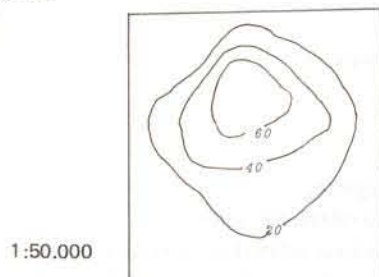


Figura 4. Coeficiente de redução 1,5 ou $\frac{2}{3}$

O resultado entre os dois métodos apresenta uma divergência pequena, isto é: de apenas $0^{\circ}05'$, o que corresponde em um declive com cem metros de base a uma diferença vertical de 0,15m, na energia média. Esta diferença entre os dois métodos, crescerá se as curvas forem assimétricas, merecendo, neste caso o segundo método:

$$\text{tg} \alpha = \frac{\Sigma l \cdot \Delta h}{A} \text{ maior confiabilidade.}$$

Todavia, é preciso que se diga que os dados básicos, isto é: as variáveis Área:: Morfologia das Isohipsas, são tiradas de cartas topográficas, afetadas de erros subjetivos na forma de "topografar" o terreno, e erros objetivos surgidos através da inadequação dos intervalos verticais das curvas de nível, além da dificuldade na interpolação e forma real das linhas Isohipsas.

Nas cartas obtidas por aerofotogrametria, o erro objetivo, mais o subjetivo, é maior para os intervalos verticais, o que afeta sobremaneira as áreas planas próprias a um aproveitamento agrícola intensivo (Veja figura 2). A melhor possibilidade de uma representação morfográfica se antepõe a imperfeita orientação do plano médio do estereograma, que depende da correta colimação do plano médio do modelo

estereográfico e da identificação ontológica dos pontos nivelados e posicionados na foto. Os erros objetivos são mais sensíveis na composição do *Kartenbild* onde as áreas restituídas ou ortoprojetadas de pares estereofotogramétricos são transferidas para a carta e semiologicamente estruturadas. A automatização dos processos, a partir das fotos até o produto cartografado acabado, transfere os problemas para a computação, a qual, no entanto, também tem se mostrado ineficaz na resolução de problemas do tratamento lógico do modelo geométrico.

Arthur L. Bloom in "Superfície da Terra" é levado a dizer que "Os melhores mapas topográficos são somente aproximações das infinitas irregularidades das encostas dos morros". Não sabemos ainda que grau de irregularidade é significativa na estabilidade das encostas, de modo que nunca estamos seguros de que estamos medindo os ângulos e as distâncias corretas.

A CONVENIÊNCIA DE UM PROCESSO DE DETERMINAÇÃO DIRETA DA ENERGIA DO RELEVO

É, pois, fora de dúvida a necessidade de se dispor de um método mais direto e mais confiável para a determinação da energia do relevo. A organização dos espaços agrícolas, o cálculo do custo dos transportes, o planejamento de uso dos solos e sua proteção contra a erosão, a seleção de áreas de obtenção de energia hídrica e muitos outros fatores do planejamento compreensivo dependem, como já foi dito anteriormente, diretamente do conhecimento correto da energia do relevo.

O método de medição "direta" culminando na obtenção de uma curva de amplitude de energia por área, permitindo a indicação do *Índice de Dissimilaridade Energética* foi proposto, pelo autor, usando, parcialmente, o princípio da *Curva de Lorenz*. Este método facilitará, significativamente, a determinação e confiabilidade de *explicação, lógica e matemática*, da energia do relevo por área.

O MÉTODO PROPOSTO

O método inicia com os procedimentos topográficos de campo. Normalmente, o topógrafo, fazendo a determinação morfográfica por pontos significativos (figura 1, A e B), usando a taqueometria, não costuma visar, sobre a mira, a mesma altura do instrumento (a_i). Com isso ele introduz, na fórmula, a necessidade de somar a altura do instrumento e deduzir a cota lida na mira;

$$H = a_i + \Delta h - m \quad (6)$$

onde H é a diferença de cota entre a estação do instrumento e o ponto visado;
 Δh = diferença de altura entre os dois pontos;
DH = Distância horizontal;

DI = leitura na mira entre os fios estadimétricos : 100;
 $\pm a$ = ângulo vertical de aclave ou declive.
 É presumida luneta amalática com constante 100.

$\Delta h = DH \cdot \tan a$ = Diferença de altura
 $DH = dl \cdot \cos^2 a$ = Distância horizontal

então: $\Delta h = dl \cdot \cos^2 a \cdot \tan a$ (6a)

EXEMPLO:

$dl = 1,25m \cdot 100 = 125m$
 $a = 85^\circ 12'$ (zenital) \angle aclave $4^\circ 48'$
 $\Delta h = 125m \cdot \cos^2 4^\circ 48' \cdot \tan 4^\circ 48'$ $\Delta h = 10,42m$
 $DH = 124,12m$
 $a_i = 1,53m; a_{ji} = 1,73m$
 $H = 1,53m + 10,42 - 1,73m = + 10,22m$

É lhamo considerar que a visada do fio médio na mira, igual a altura do instrumento ($a_i = a_{ji}$), tem por consequência a medição do *Declive ou Aclave real* do retorno, cuja média, geral ou por estratos, expressa a verdadeira energia do relevo. A correção dos resultados depende então somente da distribuição normal das medidas por área (x^2) e da propriedade da amostra. O autor propôs fosse esse o procedimento usual em taqueometria, em detrimento das alturas diferentes do instrumento e da visada com o fio médio sobre a mira. Entende-se ainda que o processo poderá contar com um cursor sobre a mira para fixar o valor igual a " a_i ", simplificando, assim, a fórmula e reduzindo a margem de erro.

Ainda, como as calculadoras eletrônicas usuais aceitam ângulos maiores de 90° , dispondo o resultado com o sinal $+$ - próprio, o autor recomendou, em 1978, a alteração da fórmula 6a para:

$$\Delta h = \sin^2 a^z \cdot dl \cdot \cot a^z$$

a^z = Ângulo zenital.

Figura 5

TAQUEOMETRIA
Medição dos ângulos reais

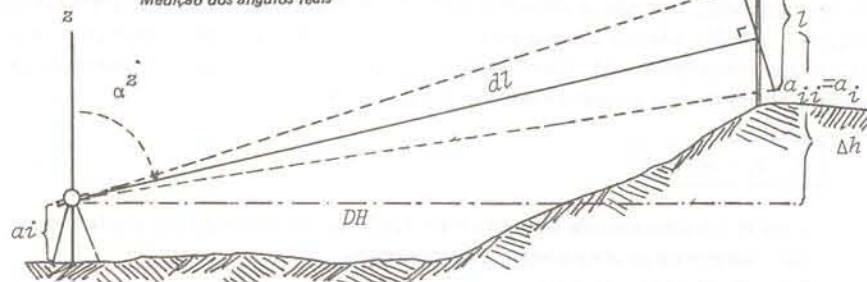


Figura 5. Coeficiente de redução 1,5 ou $\frac{2}{3}$

$$\text{Em vez de: } \underbrace{\cos^2 (90 \pm \alpha) \cdot (dl \cdot 100)}_{DH} \cdot \underbrace{\tan \alpha}_{\Delta h} = \Delta h$$

$$H = a_i + \Delta h - m$$

$$\cos^2 (90^\circ - 85^\circ 12') \cdot 1,25m \cdot 100 \cdot \tan 4^\circ 48'$$

$$\cos^2 4^\circ 48' \cdot 125m \cdot \tan 4^\circ 48'$$

$$DH = 124,12m \quad \Delta h = 10,42m$$

$$H = 1,53m + 10,42m - 1,73m = +10,22m$$

$$\text{Usa-se: } \underbrace{\sin^2 \alpha^2 \cdot (dl \cdot 100)}_{DH} \cdot \underbrace{\cot \alpha^2}_{\Delta h} = \Delta h$$

$$\underbrace{\sin^2 85^\circ 17' 40'' \cdot 125m}_{DH} \cdot \underbrace{\cot 85^\circ 17' 40''}_{\Delta h} = H = +10,22m$$

$$DH = 124,16m$$

É evidente que o uso de equipamentos automatizados, como, por exemplo, o distanciômetro elétrico-óptico DM 502 da Firma Kern, combinado com a calculadora e impressora HP 19C, tira dos ombros do topógrafo todas as preocupações senão as da interpretação morfográfica do terreno. Infelizmente, entre nós, devido à baixa cotação da moeda, tais equipamentos não estão ao alcance do profissional médio.

Por sua vez, os declives obtidos dos estereogramas aerofotogramétricos, quando isolados e distribuídos pelo estereomodelo, são pouco afetados pelas eventuais deformações do plano de referência. A medição dos declives, no estereograma, obedece — a par das sofisticações do equipamento de maior tecnologia como o Steco-mato Zeiss-Jena, por exemplo, — as fórmulas básicas da leitura da paralaxe, passíveis de obter com Espereoscópio de espelhos do tipo ST 4 da Firma Wild, por exemplo.

$$<2\% \text{ de } h_0; \Delta h \pm \Delta p \cdot \frac{h_q}{b}$$

$$<10\% \text{ de } h_0; \Delta h \pm \Delta p \cdot \left(\frac{h_q}{b} + \frac{\Delta h^2}{h_0^2} \right) \quad (8)$$

$$>10\% \text{ de } h_0; \Delta h = p \cdot \frac{h_0}{b' + \Delta p}$$

onde Δh é a diferença de altura entre dois pontos;

p = a paralaxe medida;

h_0 = altura de vôo sobre o plano médio do terreno;

b' = a distância entre o ponto principal da primeira foto do estereograma e o centro da segunda foto transferido para a superposição longitudinal da primeira foto.

Como referência à base: altura, $\frac{a}{b} = \tan \alpha$, costuma usar a proporção mínima de 1:50 para oferecer uma determinação confiável.

(Por exemplo: $\Delta h = a = 10,22m$; para $b = 511,00m = 1^\circ 08'$; b na escala de 1:50.000 = 1,02cm.)

No exemplo, 1.02cm, representando 511m na escala de 1:50.000, importa em apenas 7,4% da superposição longitudinal (60% para o formato 23:23cm), isto é: participa, mesmo na periferia, muito pouco da eventual deformação do plano médio do modelo.

Desta forma, as medidas de declive, feitas por taqueometria ou tiradas do modelo estereométrico de aerofotos, desde que normalmente distribuídos (o que na taqueometria raramente é o caso) e com a densidade requerida à amostragem da caracterização, oferecem um substrato muito mais confiável para a avaliação da energia do relevo, do que as cartas topográficas de média qualidade. O processo propicia medidas de primeira mão, enquanto as obtidas das cartas sempre serão de "segunda mão" afetadas de erros subjetivos, objetivos e sistemáticos.

A CURVA DE LORENZ-THOFEHRN

A curva de Lorenz-Thofehr é um método de plotar duas variáveis em um gráfico para visualizar as similitudes de sua distribuição areal. Thofehr usou o princípio da curva de Lorenz para representar a distribuição, por área, da grandeza da energia do relevo de uma área total.

A técnica repousa na teoria dos subconjuntos, por subáreas de diferentes tamanhos e igual energia de relevo e de estratos de diferentes energias de relevo. As associações areais são modelos teóricos muito expressivos, que podem ser feitos sem passar, necessariamente, pela graficação. Seja mapeamento, sejam figuras estatísticas, a *teoria dos conjuntos* aplicada às associações espaciais — que podem ser em grande número — é uma espécie de redução gradativa da área em busca de uma crescente adequação.

O coeficiente de correspondência areal, dado pela curva de Lorenz-Thofehr para a energia do relevo, presume uma área na qual ambos os fenômenos estão localizados juntamente, isto é: simplesmente a interseção A e B ($A \cap B$). A área coberta por cada fenômeno será a união de A e B ($A \cup B$). Nitidamente a área $A \cup B$ define o nível absoluto de correspondência entre os valores de declive e as áreas obtidas pelo cálculo analítico ou pelo planímetro e que pode ser caracterizado pela relação $A \cup B$; isto é: a área coberta pelos dois fenômenos.

Assim uma medida de correspondência areal C_A é dada pela fórmula:

$$C_A = \frac{A \cap B}{A \cup B} \quad (9)$$

que relaciona a área de correspondência areal direta a correspondência possível. Esta relação numérica simples é o coeficiente de correspondência areal. Se as duas distribuições são completamente separadas, então $A \cap B = \text{zero}$ e C_A também é igual a zero. Por outro lado, se as duas distribuições correspondem exatamente: $A \cup B = A \cap B$ então C_A é igual a um.

No caso, a área em si representa a variável A, e o estrato de declive, a variável B. Quando há uma correspondência de declives iguais para áreas iguais, a correspondência é total e a linha resultante é de regressão linear ($y = a_1x + a_0$) e o índice de dissimilitude tende a zero. Os declives crescentes, por áreas decrescentes, tendem à máxima desigualdade, numa ajustagem à curva exponencial ($y = a.e^{bx}$) com o índice de dissimilitude tendendo a cem por cento.

A CONSTRUÇÃO DA CURVA DE LORENZ-THOFERN

A curva de Lorenz é um método de plotar duas variáveis em um gráfico porcentual para visualizar as similitudes e dissimilitudes de sua distribuição areal. Thofern usou o princípio da curva de Lorenz para representar a distribuição, por áreas, da grandeza da energia do relevo, de uma área total.

Forma de construção da curva

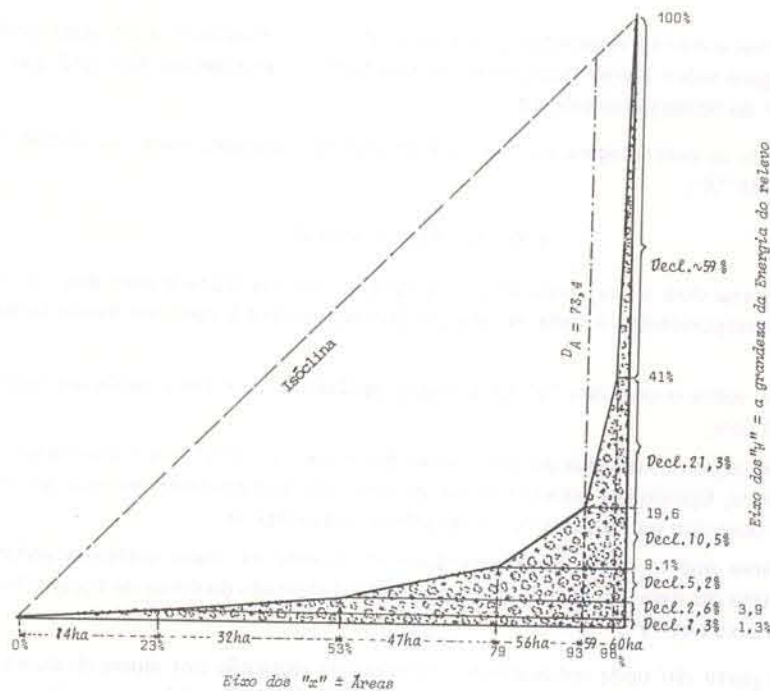


Figura 6. Coeficiente de redução 1,5 ou $\frac{2}{3}$

DECLIVES

1. Segundo a temática são estatuídos os estratos do relevo em graus;
2. Calcula-se o ponto médio dos estratos em porcentagem, ordenando-os do menor ao maior. Soma-se os valores percentuais e divide-se o número 100 (Universo) pela soma dos percentuais, obtendo assim a constante "K";
3. Multiplica-se cada valor percentual da coluna 2 pela constante "K" alcançando, assim, a porcentagem sobre o universo dos declives. A soma Σ será igual a cem;
4. Acumula-se as porcentagens de \sum a 100 e obtenha, desta forma, os valores da coordenada "Y".

ÁREAS

5. Soma-se o número de declives medidos no terreno ou no estereomodelo aerofotográfico por estratos temáticos estatuídos no passo 1 e divide-se o número 100 (Universo) pela soma do número de declives medidos e obtenha a constante "K";
6. Multiplica-se o número de declives medidos da coluna 5 pela constante "K" alcançando, assim, a porcentagem sobre o universo da área. A soma Σ será igual a cem.
7. Calcula-se a área correspondente a cada estrato, em metros quadrados, segundo as porcentagens sobre a área total, dadas na coluna 6. A soma das parcelas será igual à área total do universo considerado;
8. Acumule as porcentagens da coluna 6 de \sum a 100, obtendo, assim, os valores da coordenada "X".

EXECUÇÃO GRÁFICA

9. Desenha-se dois eixos conformes (Figura 6) e plota-se sobre o eixo dos "X" as Áreas correspondentes a cada estrato de declive, de zero a cem, em escala conveniente.
10. Plote, sobre o eixo dos "y" os Estratos de Declive, na mesma escala do item 9, de zero a cem;
11. Ligue os pontos obtidos pela interseção dos eixos "x" e "y", por linhas retas;
12. Finalize, ligando por uma linha reta, partindo do zero por cento no eixo dos "x" aos cem por cento no eixo dos "y" e obtenha a linha isóclina;
13. Observe que o índice de dissimilitude se localiza na maior distância vertical entre a reta do item 12 (Isóclina) e o ponto mais afastado da curva de Lorenz-Thofehn, no eixo dos "y".

A partir daí pode ser avaliada a natureza da regressão por ajuste de curva. O sistema pode ser, também, tratado diretamente como um modelo matemático, e a digressão linear é passível de avaliação por fórmulas simples: de adequação a curvas típicas e por determinação direta do índice de dissimilitude D_A .

EXEMPLO DE GRAFICAÇÃO

"Y" DECLIVE

1	Declive temático es- tratificado em graus	2	Ponto médio do declive em %	3	Porcentagem dos Estratos s/Σ Decl.	4	Σ da porcentagem dos declives
1	0°30' → 1°00'	1,3		1,3		1,3	
2	> 1°00' → 2°00'	2,6		2,6		3,9	
3	> 2°00' → 4°00'	5,2		5,2		9,1	
4	> 4°00' → 8°00'	10,5		10,5		19,6	
5	> 8°00' → 16°00'	21,3		21,4		41,0	
6	> 16°00' → 45°00'	58,9		59,0		100,0	
		Σ 99,9		Σ 100,0			
		K = $\frac{100,0}{99,8} = 1,002$					

e a área determinada da seguinte maneira:

"X" ÁREA

	5	n.º de declives medidos	Porcentagens s/ 6 a área total; (distr. normal)	7	Proporção s/a área total em m ²	8	Σ das porcentagens das áreas
1		250	23,5		141.000		23,5
2		310	29,1		174.600		52,6
3		280	26,3		157.800		78,9
4		150	14,1		84.600		93,0
5		50	4,7		28.200		97,7
6		25	2,3		13.800		100,00
		<u>Σ 1.065 pontos</u>	<u>100,0</u>		<u>Σ 600.000</u>		
		$K' = \frac{100}{1,065} = 0,094$					

Muito embora a curva de Lorenz-Tofehrn possa ser feita inteiramente por modelo matemático, sem necessidade de graficação, o desenho da "curva" tem qualidade de impacto visual que auxilia o reconhecimento da natureza morfológica do terreno e a grandeza dos declives, e permite tirar um grande número de correlações pela simples medida escalar.

MEDIDAS DA ASSOCIAÇÃO ENTRE ÁREA E DECLIVE

A forma usual de medir o grau de associação areal a partir da curva de Lorenz também se aplica à curva de correspondência Energia do Relevo ∝ Área, proposta por Thofehrnrn em 1978 e consiste na computação do índice de dissimilitude D_A. Este índice pode ser definido graficamente como a distância vertical máxima entre a diagonal e a curva (figura 6).

A amplitude da dissimilitude da curva de Lorenz-Thofehrn é de zero a cem por cento para dois casos limite: com declives iguais e igual número de medidas tomadas no terreno, a figura tende à Regressão Linear ($y = a + bx$) e o índice de dissimilitude tende a zero. Para a máxima desigualdade entre declives e áreas, o índice tende para uma curva exponencial ($y = ae^{bx}$). Mais freqüentemente os terrenos se caracterizam por ajuste à curva de potência ($y = ax^b$).

Além do ajuste há o já mencionado *índice de dissimilitude* D_A que pode ser obtido pela medição direta sobre a curva graficada (figura 6), ou então pela fórmula:

$$D_A = \Delta \max (cx_i - cy_i)$$

(10)

usando os valores percentuais cx_i e cy_i , cumulativos, obtidos para a construção gráfica da curva.

$$D_A = \Delta \max (cx_i - cy_i)$$

nº	cx_i	cy_i
1	23,5%	1,3%
2	52,6%	3,9%
3	78,9%	9,1%
4	93,0%	19,6%
5	97,7%	41,6%
6	100,0%	100,0%

$$D_A = 73,4\%$$

Ou, ainda, aproveitando as porcentagens não acumuladas de ambas as variáveis:

$$D_A = \left(\frac{\sum x_i - y_i}{2} \right)$$

(11)

nº	x_i	y_i	$x_i - y_i$
1	23,5	1,3	22,2
2	29,1	2,6	26,5
3	26,3	5,2	21,1
4	14,1	10,5	3,6
5	4,7	21,4	16,7
6	2,3	59,0	56,7

Σ sem observância do sinal \pm

$$\Sigma 146,8 : 2 = 73,4$$

$$D_A = 73,4\%$$

CONCLUSÃO

A importância básica dos índices reais da energia do relevo dificilmente poderá ser super-enfatizado. Ao coordenar, em 1969, a ação cartográfica do projeto de

Levantamento de Recursos Naturais, Sócio-econômicos e infra-estrutura no Estado do Rio Grande do Sul, executado pelo INCRA-IGRA-IICA, o autor aconselhou fosse feito, sobre as cartas da DSGE e das aerofotos existentes, uma Compartimentação Morfológica do Universo Territorial. Evidentemente, os reconhecimentos de solos e da capacidade de uso, detalhadas nas planícies de agricultura intensiva, menos pormenorizados nos relevos médios e restrito às essencialidades nos declives proibitivos às práticas agrícolas, poderiam ser feitos com grande ganho de tempo, maior eficácia e com significativa economia. Embora a sugestão do autor não fosse aceita, fazendo-se um trabalho homogêneo em todos os estratos morfológicos do universo territorial — adequado ou não às lides agrícolas — o desenvolvimento do trabalho mostrou dados supérfluos nas áreas de grande energia do relevo, como no escalonamento do *trapp* basáltico, por exemplo, e informações insuficientes em superfícies planas, como, por exemplo, no litoral norte.

A seguir é dado um exemplo de levantamento topográfico, usando o método proposto pelo autor, em uma área de vinte e um hectares, sita na estrada de Via-mão—Estância Grande, pertencente a Participações Sans-Souci sob a direção do progressista Empresário Selvino Kunzler. O trabalho foi executado pelo autor com a participação de Instrutor de Topografia da UFRGS Francisco Magro e estudante de Arquitetura e Urbanismo Claudio Luíz G. da Silva.

Sobre a rede UTM, dividida para esse fim, em celas de $100 : 100\text{m} = 10.000\text{m}^2$ ou 1ha, se determinou a distribuição de cento quarenta e cinco declives medidos, de um total de duzentos pontos, atingindo a área poligonal e extrapoligonal circunjacente, no total de trinta e sete hectares, pelo método do qui-quadrado.

O problema, na Taqueometria é a determinação das características morfológicas da paisagem com um mínimo de pontos temáticos à correta representação do "Kartenbild" e não, propriamente, a distribuição normal dos pontos sobre o universo.

A carta é um modelo simplificado, reduzido e explanado da realidade, e contém, por isso, apenas os fatores significativos à caracterização escalar.

A distribuição normal dos declives medidos é possível no modelo estéreo-aerofotogramétrico, onde, pelo imageamento, as formas topomorfográficas estão, de antemão, asseguradas.

A distribuição normal do teste do qui-quadrado tende a zero. No Estudo Geomorfográfico de uma tença de posse da Empresa Participações Sans-Souci Limitada, figura 7, mencionado como exemplo, o χ^2 é da ordem de 61,4, mostrando uma distribuição bastante irregular por área dos declives medidos a qual é, como foi dito, decorrência da construção analógica do modelo cartográfico a partir do processo taqueométrico.

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \quad (12)$$

onde O é o número de pontos observados por cela; E = o número esperado por cela fosse a distribuição normal. Para uma distribuição normal o índice χ^2 (quiquadrado) tende a zero.

Cela	O	E	O-E	(O-E) ²
a	5	3,9	1,1	1,2
b	8		4,1	16,7
c	6		2,1	4,3
d	5		1,1	1,2
e	2		-1,9	3,7
f	1		-2,9	8,5
g	3		-0,9	0,8
h	8		4,1	16,7
i	1		-2,9	8,5
j	1		-2,9	8,5
k	6		2,1	4,3
l	6		2,1	4,3
m	8		4,1	16,7
n	1		-2,9	8,5
o	5		1,1	1,2
p	1		-2,9	8,5
q	9		5,1	25,8
r	6		2,1	4,3
s	3		-0,9	0,8
t	1	3,9	-2,9	8,5

Cela	O	E	O-E	(O-E) ²
u	4	3,9	0,1	0,0
v	3		-0,9	0,8
w	8		4,1	16,7
x	1		-2,9	8,5
y	3		-0,9	0,8
z	4		0,1	0,0
A	1		-2,9	8,5
B	0		-3,9	15,4
C	3		-0,9	0,8
D	4		0,1	0,0
E	3		-0,9	0,8
F	3		-0,9	0,8
G	4		0,1	0,0
H	4		0,1	0,0
I	1		-2,9	8,5
J	9		5,1	25,8
K	4	3,9	0,1	0,0
145 pontos				Σ 240,8

(E = 3,9184)

$$x^2 = \frac{240,8}{3,9} = 61,4; x = 7,8$$

Como todo mapa obtido por Taqueometria, os métodos topográficos apresentam, ontologicamente, o vício da distribuição irregular de pontos, que se concentram nas áreas de maior complexidade morfográficas e tendem a desconcentração nas áreas de formas simples. O método indireto, da obtenção, a partir da carta, da energia do relevo, enfrenta dois problemas:

a) a má distribuição dos pontos de determinação das inclinações que é inerente ao método topográfico e é comum aos dois processos: da medição direta e da indireta sobre a carta;

b) os momentos subjetivos, objetivos e sistemáticos, que tendem a descaracterizar a analogia do modelo e que é inerente apenas ao processo indireto da determinação da energia do relevo sobre a carta.

O método proposto por Thofehrn, expresso através da curva de Lorenz-Thofehrn da medição direta da energia do relevo, tende eliminar o problema (b) da medição morfográfica indireta e grangear, com isso, uma determinação mais correta da informação básica de todo processo morfométrico, que é a determinação da energia do relevo; cuja importância técnica, econômica e científica não pode ser subestimada, sob pena de invalidar o planejamento compreensivo que envolve a inserção na paisagem geográfica.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- THE AMERICAN SOCIETY OF PHOTOGRAMMETRY. 1974. *Manual of remote sensing*, ASP, Virginia, Falls Church.
- BERTIN, Jacques. 1974. *Graphische Semiologie*. Berlim, Walter de Gruyter.
- CHORLEY, Richard J. & HAGGETT, Peter. 1970. *Physical and information models in Geography*, Londres, Methuen.
- COLE, J.P. & KING CUCHLAINE, A.M. 1978. *Quantitative geography*. Londres, John Wiley.
- DAVIS, FOOTE & KELLY. 1966. *Surveying*, New York, McGraw Hill.
- DICKINSON, G.C. 1970. *Maps and air photographs*. Londres, Edward Arnold.
- DOWNS, Roger M. & STEA, David. 1974. *Image and environment: cognitive mapping and spatial behavior*. Chicago, Aldine.
- THE ENGINEER SCHOOL. 1961. *Maps reading*.
- . 1961. *Topographic Surveying*. Virginia, Belvoir.
- IMHOF, Eduard. 1950. *Gelände und Karte*, Zurique, Eugen Rentsch.
- . 1965. *Kartographische Geländedarstellung*, Berlim, Walter de Gruyter.
- JORDAN EGGERT, K. 1966. *Höhenmessung und Tachymetrie*, Stuttgart. J.B. Metzlerischer Verlag.
- KERN. 1980. *Boletín Kern 29*. Kern Aarau.
- KORIN, P.B. 1977. *Introduction to statistical methods*. Cambridge, Winthrop.
- LINZ, Joseph & SIMONETT, D.S. 1976. *Remote sensing of environment*. Reading, Addison Wesley.
- MATHER, P.M. 1976. *Computacional methods of multivariate analysis in physical geography*. Londres, John Wiley.
- MONKHAUSE, F.J. & WILKINSON, H.P. 1968. *Mapas y diagramas*. Barcelona, Oikos-Tau.
- SHILOV, P.I. 1971. *Surveying*. Moscu, Higher School Publishing Hause.
- SMALL, R.J. 1978. *The study of landforms*. Londres, Cambridge University Press.
- SPIRIDONOW, A.I. 1956. *Geologische Kartographie*. Berlim, V.E.B.
- SUMMER, Granham N. 1978. *Mathematics for physical geographers*. Cambridge, Edward Arnold.
- TAYLOR, Peter, J. 1977. *Quantitative methods in geography*. Boston, Mifflin.
- THOFEHRN, Hans A. 1972. Pesquisa e fixação de critérios nos mapeamentos e métodos de trabalho de campo dos recursos minerais. *Boletim Geográfico*, CEMAPA, 17, jan./dez.
- VERSTAPPEN, H. TH. 1977. *Remote sensing in geomorphology*. Amsterdam, Elsevier.